# 数理统计 week 11

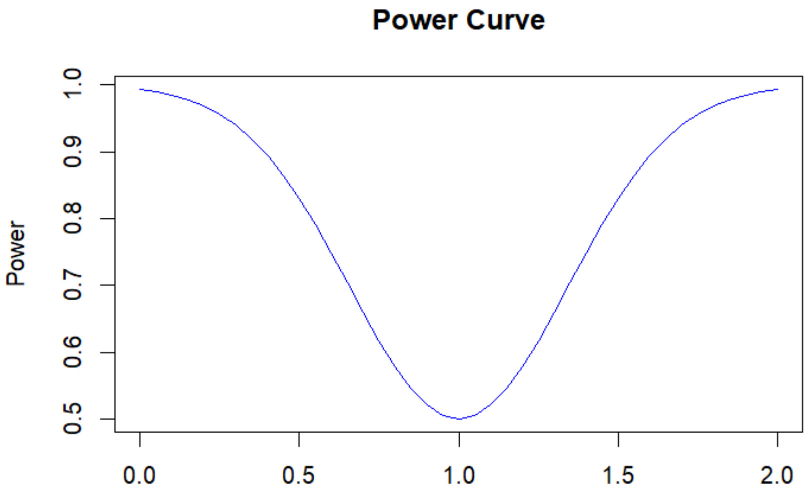
学业辅导中心

6.3.3 考察例 6.3.2 曾推导的决策规则(6.3.6)，求在 $H_0$ 为真的条件下，等价地服从标准正态分布的检验统计量. 其次，求在一般备择条件下这个检验统计量的分布，并运用它求出检验的功效函数. 如果可利用计算机，请画出 $\theta_0=1$，$n=10$，$\sigma^2=1$ 以及 $\alpha=0.5$ 情况下的功效曲线.

### 注记

回顾: 例 6.3.2 给出了正态 pdf 均值的似然比检验. 它和直观的已知方差的双侧检验方法是一样的.

# 习题 6.3.3



6.3.5 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自分布 $N(\mu_0, \sigma^2=\theta)$ 的随机样本，其中 $0<\theta<\infty$，$\mu_0$ 是已知的．证明，$H_0: \theta=\theta_0$ vs $H_1: \theta\neq\theta_0$ 的似然比检验可建立在统计量 $W=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2/\theta_0$ 基础上．求 $W$ 的零分布，并明确地给出水平为 $\alpha$ 的检验的拒绝规则．

# 习题 6.3.5

$$\lambda = \frac{L(\theta_0)}{L(\hat{\theta})}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2\pi\theta_0}\right)^{n/2} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}{2\theta_0}}}{\left(\frac{n}{2\pi\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2\right)}\right)^{n/2} e^{-n/2}}$$

$$= \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}{n\theta_0}\right)^{n/2} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}{2\theta_0}} e^{n/2}$$

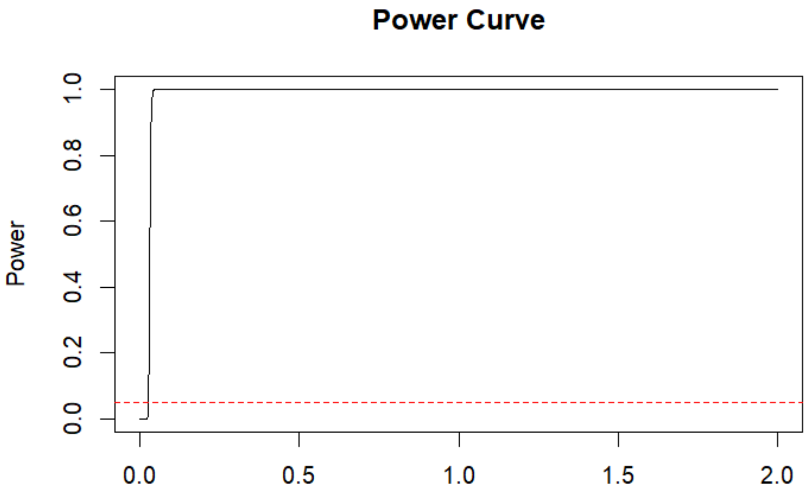
$$t = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}{\theta_0}$$

$$H_0, t \sim \chi^2(n)$$

6.3.5 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自分布 $N(\mu_0, \sigma^2=\theta)$ 的随机样本，其中 $0<\theta<\infty$，$\mu_0$ 是已知的. 证明，$H_0: \theta=\theta_0$ vs $H_1: \theta\neq\theta_0$ 的似然比检验可建立在统计量 $W=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2/\theta_0$ 基础上. 求 $W$ 的零分布，并明确地给出水平为 $\alpha$ 的检验的拒绝规则.

6.3.6 对于习题 6.3.5 所阐述的检验，求在一般备择条件下检验统计量的分布. 如果可利用计算机，请画出 $\theta_0=1$，$n=10$，$\mu=0$ 以及 $\alpha=0.05$ 情况下的功效曲线.

# 习题 6.3.3



6.3.10 设 $X_1$，$X_2$，…，$X_n$ 是来自分布 $\Gamma(\alpha=3,\beta=\theta)$ 的随机样本，其中 $0<\theta<\infty$.

(a) 证明：$H_0: \theta=\theta_0$ vs $H_1: \theta\neq\theta_0$ 的似然比检验可建立在统计量 $W=\sum_{i=1}^{n} X_i$ 的基础上，求 $2W/\theta_0$ 的零分布.

(b) 对于 $\theta_0=3$ 与 $n=5$，求 $c_1$ 与 $c_2$，使得当 $W\leqslant c_1$ 或 $W\geqslant c_2$ 具有显著性水平 0.05 时，检验拒绝 $H_0$.

# 习题 6.3.10

$$
\begin{aligned}
\Lambda &= \frac{L\left(\theta_0\right)}{L(\hat{\theta})} \\
&= \frac{\left(2\theta_0^3\right)^{-n}\left(\prod_1^n x_i\right)^2 e^{-\sum_1^n x_i/\theta_0'}}{\left(2\left[\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^n X_i\right]^3\right)^{-n}\left(\prod_1^n x_i\right)^2 e^{-\sum_i^n x_i\left[\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^n x_i\right]}} \\
&= \left(\frac{27n\theta_0}{\sum_1^n X_i}\right)^{-3n} e^{-\sum_1^n X_i/\theta+3n}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha &= P\left(\text{ Reject } \mathrm{H}_0 \mid H_0\right) \\
&= P\left(W \leq c_1 \text{ or } W \geq c_2\right) \\
&= P\left(W \leq c_1\right) + P\left(W \geq c_2\right) \\
&= P\left(\frac{2W}{3} \leq \frac{2c_1}{3}\right) + P\left(\frac{2W}{3} \geq \frac{2c_2}{3}\right) \\
&= P\left(\chi^2_{\alpha/2,30} \leq \frac{2c_1}{3}\right) + P\left(\chi^2_{1-\alpha/2,30} \leq \frac{2c_2}{3}\right)
\end{aligned}
$$

6.3.16 设 $X_1$，$X_2$，…，$X_n$ 是来自均值为 $\theta>0$ 的泊松分布随机样本. 利用

(a) $-2\log\Lambda$.

(b) 沃尔德型统计量.

(c) 拉奥得分统计量.

对 $H_0:\theta=2$ vs $H_1:\theta\neq2$ 进行检验.

- $\chi_W^2 = nI(\hat{\theta})(\hat{\theta}-\theta_0)^2$
- $\chi_R^2 = \dfrac{\{l'(\theta_0)\}^2}{nI(\theta_0)}$
- 渐进分布

6.3.17 设 $X_1$，$X_2$，…，$X_n$ 是来自分布 $\Gamma(\alpha, \beta)$ 的随机样本，其中 $\alpha$ 是已知的而 $\beta>0$. 确定 $H_0$：$\beta=\beta_0$ vs $H_1$：$\beta\neq\beta_0$ 的似然比检验.

$$f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{a}}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x/\beta}, x>0$$

# 习题 6.3.17

$$
\begin{aligned}
L(\beta) &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \beta) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x_i^{\alpha-1} e^{-x/\beta} \\
&= (\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha})^{-n} \left( \prod_{1}^{n} x_i^{\alpha-1} \right) e^{-\sum_i^n x_i/\beta} \\
&= \left( \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} \right)^n \left( \prod_{1}^{n} x_i \right)^{\alpha-1} e^{-\sum_1^n x_i/\beta}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Lambda &= \frac{L(\beta_0)}{L(\hat{\beta})} \\
&= \frac{\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta_0^{\alpha}}\right]^n \left(\prod_1^n x_i\right)^{\alpha-1} e^{-\sum_1^n x_i/\beta_0}}{\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)(\bar{x}/\alpha)^{\alpha}}\right]^n \left(\prod_1^n x_i\right)^{\alpha-1} e^{-\alpha\sum_1^n x_i/\bar{x}}} \\
&= \left[\frac{\bar{x}}{\alpha\beta_0}\right]^{\alpha n} \exp\left\{-\sum_{1}^{n} x_i \left(\frac{1}{\beta_0} - \frac{\alpha}{\bar{x}}\right)\right\} \\
&= \left[\frac{\bar{x}}{\alpha\beta_0}\right]^{\alpha n} \exp\left\{-n\bar{x} \left(\frac{1}{\beta_0} - \frac{\alpha}{\bar{x}}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

6.3.18 设 $Y_1<Y_2<\cdots<Y_n$ 是来自均匀分布$(0, \theta)$的随机样本次序统计量，其中 $\theta>0$.

(a) 证明，检验 $H_0: \theta=\theta_0$ vs $H_1: \theta\neq\theta_0$ 的 $\Lambda$，当 $Y_n\leqslant\theta_0$ 时，$\Lambda=(Y_n/\theta_0)^n$，当 $Y_n>\theta_0$ 时，$\Lambda=0$.

(b) 当 $H_0$ 成立时，证明 $-2\log\Lambda$ 服从准确的分布 $\chi^2(2)$，而不是分布 $\chi^2(1)$. 注意，正则条件没有得到满足.

# 习题 6.3.18

$$\Lambda = \frac{L(\theta_0)}{L(\hat{\theta})} = \frac{1/\theta_0^n}{1/Y_n^2} = \left(\frac{Y_n}{\theta_0}\right)^n$$

$$\Lambda = \begin{cases} (Y_n/\theta_0)^n, & Y_n \le \theta_0 \\ 1, & Y_n > \theta_0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z < z) \\ &= P\left[-\log\left(Y_n/\theta_0\right) < z\right] \\ &= P\left[\log\left(Y_n/\theta_0\right) > -z\right] \\ &= P\left[\frac{Y_n}{\theta_0} > e^{-z}\right] \\ &= P\left(Y_n > \theta_0 e^{-z}\right) \\ &= 1 - F_{Y_n}\left(\theta_0 e^{-z}\right) \\ &= 1 - \left[\frac{\theta_0 e^{-z}}{\theta}\right]^n \end{aligned}$$

6.4.2 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 和 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$ 分别是来自 $N(\theta_1, \theta_3)$ 与 $N(\theta_2, \theta_4)$ 的独立随机样本.

(a) 如果 $\Omega \in R^3$ 由

$$\Omega = \{(\theta_1, \theta_2, \theta_3): -\infty < \theta_i < \infty, i = 1, 2; \quad 0 < \theta_3 = \theta_4 < \infty\}$$

定义，求 $\theta_1$，$\theta_2$ 以及 $\theta_3$ 的极大似然估计值.

(b) 如果 $\Omega \in R^2$ 由

$$\Omega = \{(\theta_1, \theta_3): -\infty < \theta_1 = \theta_2 < \infty; \quad 0 < \theta_3 = \theta_4 < \infty\}$$

定义，求 $\theta_1$ 与 $\theta_3$ 的极大似然估计值

第一问:

$$l = -\frac{1}{2}(n+m)\log(2\pi\theta_3) - \frac{\sum(x_i-\theta_1)^2 + \sum(y_i-\theta_2)^2}{2\theta_3}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta_1} = \frac{\sum(x_i-\theta_1)}{\theta_3}$$

$$\frac{\partial g}{\partial\theta_2} = \frac{\sum(y_i-\theta_1)}{\theta_3}$$

$$\frac{\partial d}{\partial\theta_3} = -(n+m)/2\theta_3 + \frac{\sum(x_i-\theta_1)^2 + \sum(y_i-\theta_2)^2}{2\theta_3^2}$$

$$\hat{\theta}_{\mathbf{1}} = \bar{x}, \hat{\theta}_2 = \bar{y}, \quad \hat{\theta}_3 = \frac{\sum(\boldsymbol{x}_i-\overline{\boldsymbol{x}})^2 + \sum(\boldsymbol{y}_i-\overline{\boldsymbol{y}})^2}{n+m}$$

# 习题 6.4.2

第二问:

$$
l = -\frac{1}{2}(n+m)\log(2\pi\theta_3) - \frac{\sum(x_i-\theta_1)^2 + \sum(y_i-\theta_1)^2}{2\theta_3}
$$

$$
\frac{a}{\partial\theta_1} = \frac{\sum(x_i-\theta_1) + \sum(y_i-\theta_1)}{\theta_3}
$$

$$
\frac{\partial}{\partial\theta_3} = -(n+m)/2\theta_3 + \frac{\sum(x_i-\theta_1)^2 + \sum(y_i-\theta_1)^2}{2\theta_3^2}
$$

$$
\hat{\theta}_1 = \frac{n\bar{x}+m\bar{y}}{n+m},\ \hat{\theta}_3 = \frac{\sum\left(x_i-\hat{\theta}_1\right)^2 + \sum\left(y_i-\hat{\theta}_1\right)^2}{n+m}.
$$

6.4.3 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 iid 的，每个分布都具有 pdf $f(x; \theta_1, \theta_2) = (1/\theta_2)e^{-(x-\theta_1)/\theta_2}$，$\theta_1 \leqslant x < \infty$，$-\infty < \theta_2 < \infty$，其他为 0. 求 $\theta_1$ 与 $\theta_2$ 的极大似然估计量.

$$\ln L = -n \ln(\theta_2) - \frac{1}{\theta_2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \theta_1) \ln e$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_1} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \theta_1}\left[-n\ln(\theta_2) - \frac{1}{\theta_2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta_1)\ln_e e\right] = 0$$

$$\Rightarrow 0 - \left(\frac{1}{\theta_2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i) - n\theta_1\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{n}{\theta_2} = 0$$

$$\Rightarrow \hat{\theta}_1 = X_{(1)}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \theta_2}\left[-n\ln(\theta_2) - \frac{1}{\theta_2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta_1)\ln_e e\right] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-n}{\theta_2} + \left(\frac{1}{\theta_2^2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta_1)\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-n\theta_2 + \sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta_1)}{\theta_2} = 0$$

$$\Rightarrow \hat{\theta}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta_1)}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - X_{(1)}\right)}{n}$$

6.4.5 设 $Y_1<Y_2<\cdots<Y_n$ 是来自连续型闭区间$[\theta-\rho, \theta+\rho]$上均匀分布样本量为 $n$ 的随机样本次序统计量．求 $\theta$ 与 $\rho$ 的极大似然估计量．这两个估计量都是无偏的吗？

- 提示:

$$\hat{\theta}-\hat{\rho}=Y_1$$
$$\hat{\theta}+\hat{\rho}=Y_n$$

- 提示:

$$f(y_1)=\frac{n}{(2\rho)^n}(\theta+\rho-y_1)^{n-1}$$
$$f(y_n)=\frac{n}{(2\rho)^n}(y_n-\theta+\rho)^{n-1}$$

# 习题 6.4.5

$$
\begin{aligned}
E\left(\frac{Y_1+Y_n}{2}\right) &= \frac{E(Y_1)+E(Y_n)}{2} \\
&= \frac{\frac{2n\rho}{n+1}+\theta+\rho+\frac{2n\rho}{n+1}+\theta-\rho}{2} \\
&= \frac{\frac{4n\rho}{n+1}+2\theta}{2} \\
&= \frac{2n\rho}{n+1}+\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E\left(\frac{Y_n-Y_1}{2}\right) &= \frac{E(Y_n)-E(Y_1)}{2} \\
&= \frac{\frac{2n\rho}{n+1}+\theta-\rho-\frac{2n\rho}{n+1}-\theta-\rho}{2} \\
&= \frac{-2\rho}{2} \\
&= -\rho
\end{aligned}
$$

6.4.6 设 $X_1$，$X_2$，…，$X_n$ 是来自 $N(\mu, \sigma^2)$的随机样本.

(a) 如果常数 $b$ 是由方程 $P(X\leqslant b)=0.90$ 所定义的，求 $b$ 的极大似然估计量.

(b) 如果 $c$ 是给定常数，求 $P(X\leqslant c)$的极大似然估计量.

- 直接应用 MLE 的不变性.
- $$\hat{b} = \bar{X} + z_{0.9}\sqrt{\frac{n-1}{n}}S$$
- $$\Phi\left(\frac{c-\bar{X}}{\sqrt{(n-1)/n}S}\right)$$

6.4.7 考察两个伯努利分布，它们具有未知参数 $p_1$ 与 $p_2$. 如果 $Y$ 与 $Z$ 等于来自于各自分布的两个独立随机样本中成功的次数，这里每个样本量都为 $n$，那么倘若已知 $0 \leqslant p_1 \leqslant p_2 \leqslant 1$，求 $p_1$ 与 $p_2$ 的极大似然估计量.

- 当 $y/n \leq z/n$,$\hat{p}_1 = y/n, \hat{p}_2 = z/n$ .
- 若不然, $\hat{p}_1 = \hat{p}_2 = \dfrac{y+z}{2n}$.
- 只需计算下面情况的似然函数并求出极大似然估计.